

# Examen HAVO

# 2026

tijdvak 2  
donderdag 18 juni  
13.30 - 16.30 uur

**wiskunde B**

Dit examen bestaat uit 18 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 72 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

**Ga verder op de volgende pagina.**

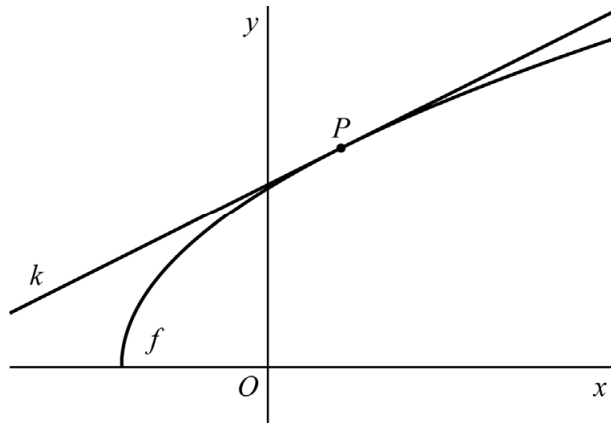
## Door punt $P$

De functie  $f$  is gegeven door  $f(x) = \sqrt{3x+6}$ .

Op de grafiek van  $f$  ligt het punt  $P(1, 3)$ .

Lijn  $k$  raakt de grafiek van  $f$  in punt  $P$ . Zie figuur 1.

**figuur 1**

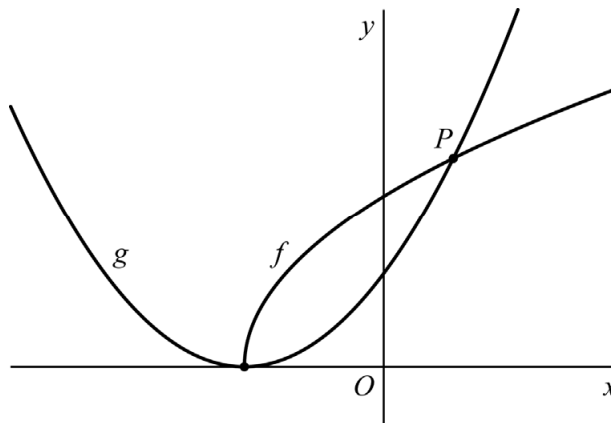


- 4p 1 Stel op exacte wijze een vergelijking op van lijn  $k$ .

De grafiek van de functie  $g$  is een parabool. De top van deze parabool valt samen met het randpunt van de grafiek van  $f$ .

De grafiek van  $g$  snijdt de grafiek van  $f$  in het punt  $P(1, 3)$ . Zie figuur 2.

**figuur 2**



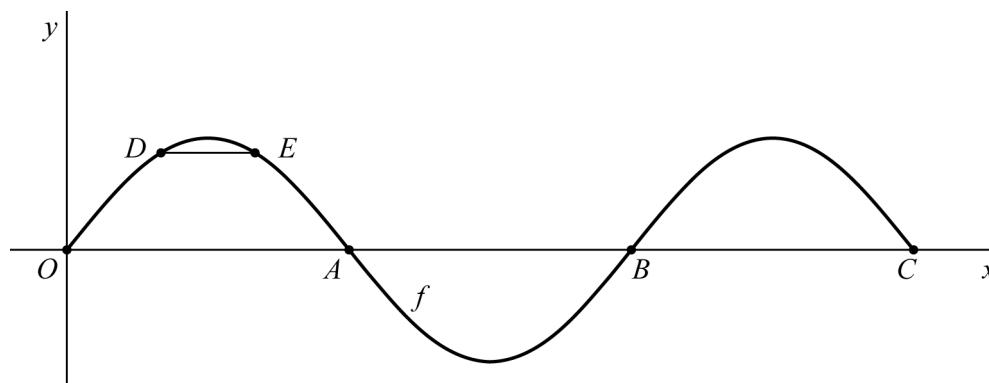
- 3p 2 Stel op exacte wijze een functievoorschrift op van  $g$ .

## Twee sinusoiden

De functie  $f$  is gegeven door  $f(x) = 2\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x)$ .

De grafiek van  $f$  is een sinusoid. In figuur 1 is vanaf de oorsprong  $O$  anderhalve periode van deze sinusoid getekend.

figuur 1



De sinusoid snijdt de  $x$ -as achtereenvolgens in de punten  $O$ ,  $A$ ,  $B$  en  $C$ . Deze punten liggen op de evenwichtsstand van de sinusoid.

De punten  $D$  en  $E$  met  $y$ -coördinaat  $1\frac{1}{4}\sqrt{3}$  liggen op de sinusoid zoals aangegeven in figuur 1.

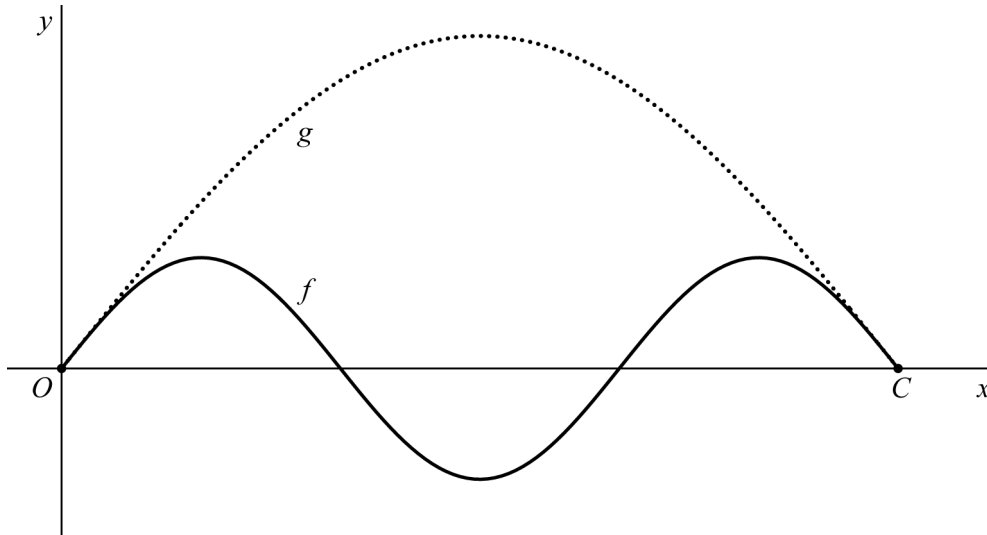
Lijnstuk  $OA$  is een aantal keer zo lang als lijnstuk  $DE$ .

5p    **3**    Bereken exact hoeveel keer zo lang.

In figuur 2 is opnieuw de grafiek van  $f$  tussen de punten  $O$  en  $C$  getekend.

Tussen de punten  $O$  en  $C$  is de grafiek van een functie  $g$  gestippeld weergegeven. Deze grafiek is een deel van een sinusoïde. De punten  $O$  en  $C$  zijn twee opeenvolgende punten op de evenwichtsstand van deze sinusoïde.

**figuur 2**



In  $O$  hebben de grafieken van  $f$  en  $g$  dezelfde helling. Deze helling is gelijk aan 1,25.

Een functievoorschrift van  $g$  is van de vorm  $g(x) = v \cdot \sin(\frac{1}{6}x)$ .

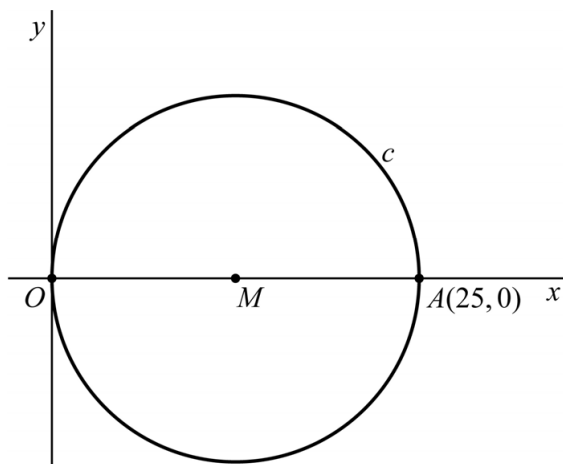
De helling van de grafiek van  $g$  in  $O$  kan benaderd worden door de berekening van het differentiequotiënt  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  op een klein interval.

- 4p   **4** Bereken de waarde van  $v$  met behulp van het differentiequotiënt op het interval  $[0; 0,01]$ . Geef je eindantwoord in één decimaal.

## Raaklijn door een punt aan een cirkel

Gegeven is het punt  $A(25, 0)$ . Daarbij is de cirkel  $c$  gegeven met middellijn  $OA$ . Het middelpunt van  $c$  is  $M$ . Zie figuur 1.

**figuur 1**



Een vergelijking van  $c$  is  $y^2 = 25x - x^2$ .

- 3p **5** Bewijs dat dit inderdaad een vergelijking van  $c$  is.

Verder is de cirkel  $d$  gegeven met middelpunt  $O$ .

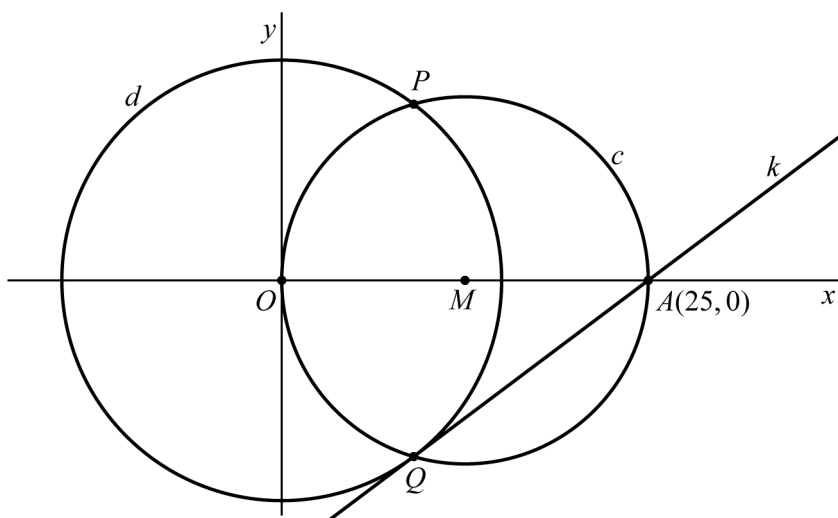
Een vergelijking van  $d$  is  $y^2 = 225 - x^2$ .

De punten  $P$  en  $Q$  zijn de snijpunten van  $c$  en  $d$ .

Punt  $P$  ligt boven de  $x$ -as en punt  $Q$  onder de  $x$ -as.

De lijn  $k$  gaat door de punten  $A$  en  $Q$ . Zie figuur 2.

**figuur 2**

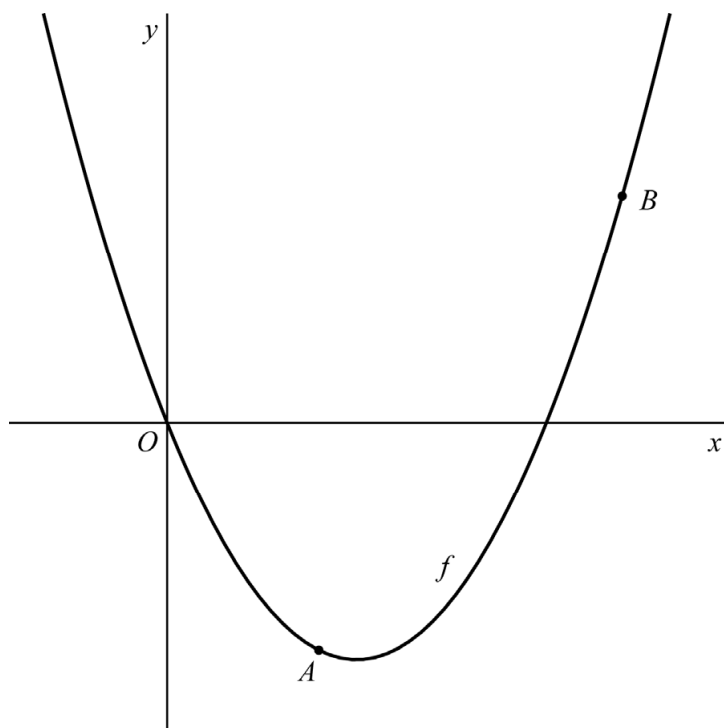


- 6p **6** Bewijs dat lijn  $k$  een raaklijn aan cirkel  $d$  is.

## Twee punten op een parabool

De grafiek van  $f$  is een parabool. De punten  $A$  en  $B$  liggen op de grafiek. Zie de figuur.

figuur



Punt  $A$  heeft  $x$ -coördinaat 2 en punt  $B$  heeft  $x$ -coördinaat 6.

In punt  $A$  is de helling van de raaklijn  $-\frac{1}{2}$ .

In punt  $B$  is de helling van de raaklijn  $3\frac{1}{2}$ .

Het functievoorschrift van  $f$  is van de vorm  $f(x) = cx^2 + dx$ .

Uit de bovenstaande gegevens volgt het volgende stelsel:

$$\begin{cases} 4c + d = -\frac{1}{2} \\ 12c + d = 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

2p 7 Bewijs dat het stelsel uit de gegevens volgt.

Door het stelsel op te lossen, krijg je de waarden  $c$  en  $d$  van de functie  $f$ .

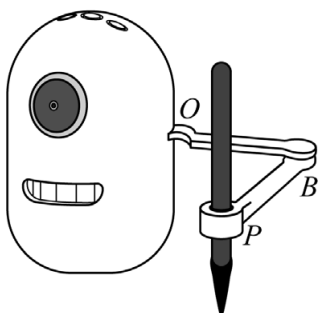
De punten  $A$  en  $B$  lijken in de figuur even ver van de  $x$ -as te liggen.

4p 8 Onderzoek op exacte wijze of  $A$  en  $B$  inderdaad even ver van de  $x$ -as liggen.

## Tekenrobot

Een tekenrobot is een apparaat dat zelf kan tekenen. In deze opgave wordt een tekenrobot met een scharnierbare tekenarm bekeken. De tekenarm bestaat uit de beweegbare delen  $OB$  en  $BP$ . Zie figuur 1.

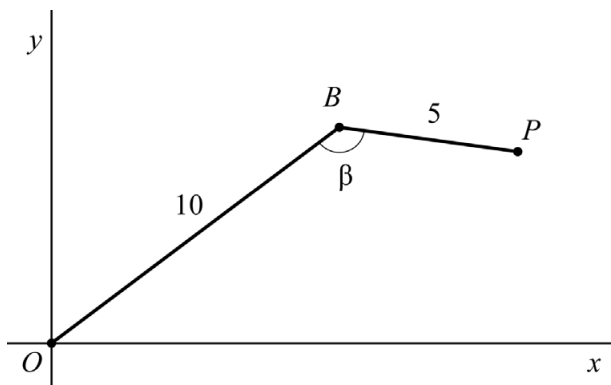
figuur 1



In figuur 2 is in een assenstelsel een bovenaanzicht weergegeven van de scharnierbare tekenarm. De lengte van  $OB$  is 10 cm en de lengte van  $BP$  is 5 cm.

De oorsprong is een vast punt. De tekenarm draait om dit punt. In punt  $B$  scharniert de tekenarm, waardoor  $BP$  om punt  $B$  kan draaien. De delen  $OB$  en  $BP$  maken een hoek  $\beta$  met elkaar.

figuur 2 bovenaanzicht tekenarm



De tekenrobot tekent met punt  $P$ . Om een deel van een cirkel met middelpunt  $O$  te tekenen, moet hoek  $\beta$  op een vaste waarde worden ingesteld. Door de tekenarm vervolgens rond de oorsprong te draaien, tekent punt  $P$  de cirkelboog.

De straal  $OP$  van de getekende cirkelboog hangt af van hoek  $\beta$ .

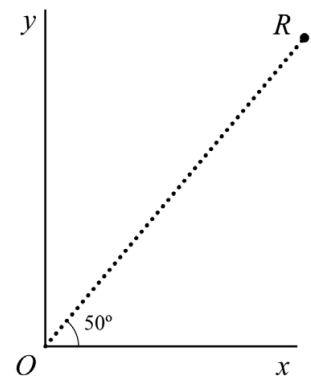
Er moet een cirkelboog met middelpunt  $O$  en straal 14 cm worden getekend.

- 3p **9** Bereken op hoeveel graden hoek  $\beta$  moet worden ingesteld. Geef je eindantwoord in gehelen.

Bij een andere tekenrobot hebben de twee beweegbare delen van de tekenarm allebei lengte 10 cm, dus  $OB = BP = 10$ .

Een punt  $R$  wordt in het assenstelsel geplaatst zodat lijnstuk  $OR$  een hoek van 50 graden maakt ten opzichte van de positieve  $x$ -as. Zie figuur 3.

**figuur 3**

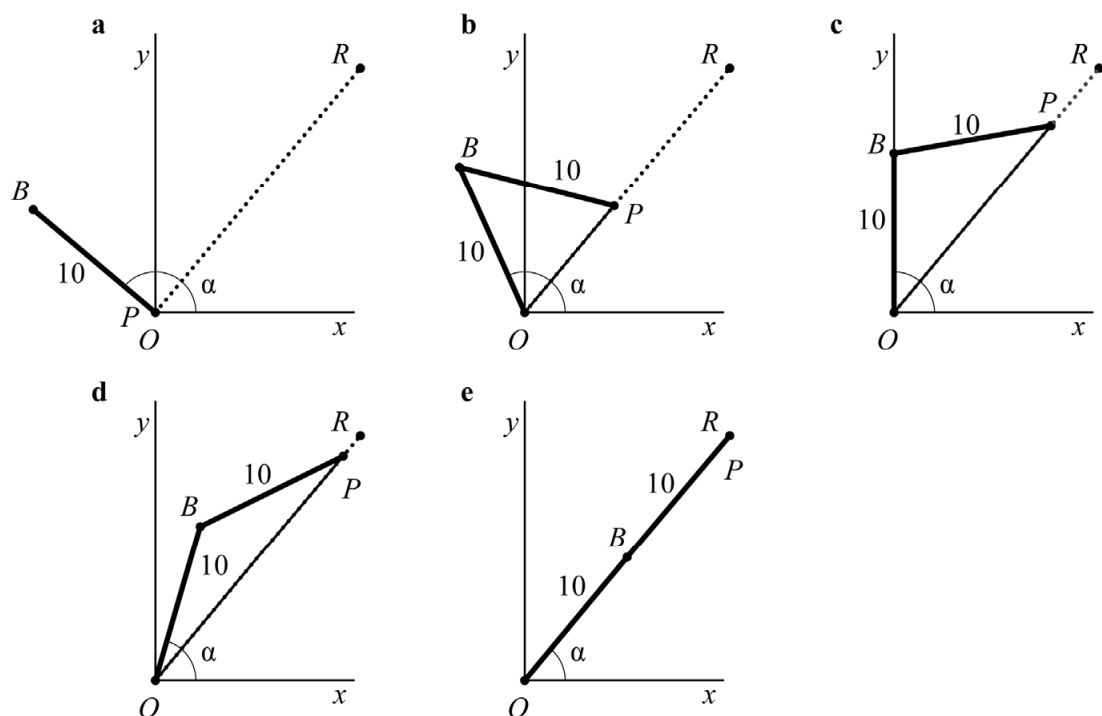


De afstand van punt  $R$  tot de oorsprong is 20 cm.

De tekenrobot moet lijnstuk  $OR$  gaan tekenen. Hij beweegt daarom punt  $P$  in een rechte lijn van  $O$  naar  $R$ .

In figuur 4 is voor verschillende momenten (a, b, c, d en e) het bovenaanzicht van de tekenarm weergegeven tijdens het tekenen. In de beginstand liggen beide delen van de tekenarm op elkaar en staan ze loodrecht op lijnstuk  $OR$ . Punt  $P$  bevindt zich in de oorsprong.

**figuur 4 bovenaanzicht tekenarm tijdens het tekenen van lijnstuk  $OP$**



De hoek die lijnstuk  $OB$  maakt met de positieve  $x$ -as, is aangegeven met  $\alpha$ . In eerste instantie is hoek  $\alpha$  groter dan 90 graden. Tijdens het tekenen van de lijn wordt hoek  $\alpha$  steeds kleiner tot uiteindelijk 50 graden.

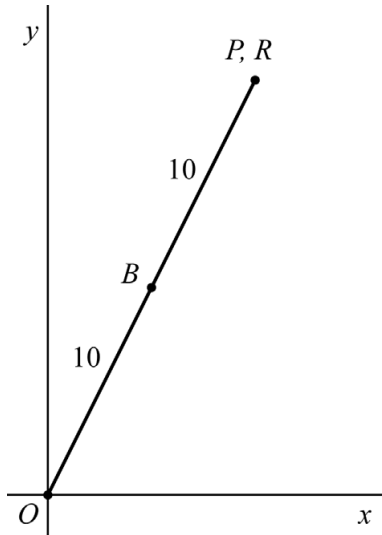
In de situatie van figuur 4c geldt dat  $\alpha = 90^\circ$ .

- 4p **10** Bereken de lengte van lijnstuk  $OP$  in figuur 4c. Geef je eindantwoord in cm in één decimaal.

Om de positie van een willekeurig punt  $R$  vast te leggen moeten de helling en lengte van lijnstuk  $OR$  in de tekenrobot worden ingevoerd.

Lijnstuk  $OR$  wordt ingevoerd met lengte 20 cm en richtingscoëfficiënt 2. In figuur 5 is de eindpositie van de tekenarm van de tekenrobot getekend.

**figuur 5**



- 4p 11 Bereken in deze situatie algebraïsch de coördinaten van punt  $R$ . Geef je eindantwoord in cm in één decimaal.

## Exponentiële functies

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$ .

De grafiek van  $f$  wordt eerst 2 naar rechts verschoven en daarna vermenigvuldigd ten opzichte van de  $x$ -as met  $\frac{8}{3}$ .

Zo ontstaat de grafiek van de functie  $g$ .

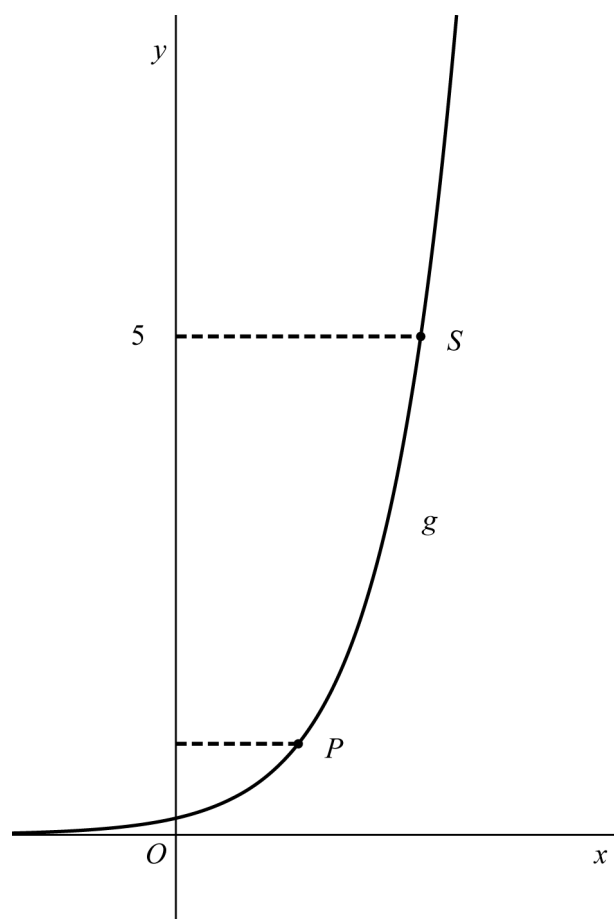
Deze functie kan worden geschreven als  $g(x) = \frac{1}{6} \cdot 4^x$ .

4p 12 Bewijs dit.

Op de grafiek van  $g$  ligt een punt  $S$  met  $y$ -coördinaat 5.

Op de grafiek van  $g$  ligt ook een punt  $P$  zó, dat de afstand van  $P$  tot de  $y$ -as de helft is van de afstand van  $S$  tot de  $y$ -as. Zie de figuur.

figuur



De  $y$ -coördinaat van  $P$  is te schrijven als  $\frac{1}{6}\sqrt{30}$ .

5p 13 Bewijs dit.

## Product van functies

De functie  $f$  is gegeven door  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ .

Deze functie heeft één maximum en één minimum.

- 4p 14 Bereken exact het minimum van de grafiek.

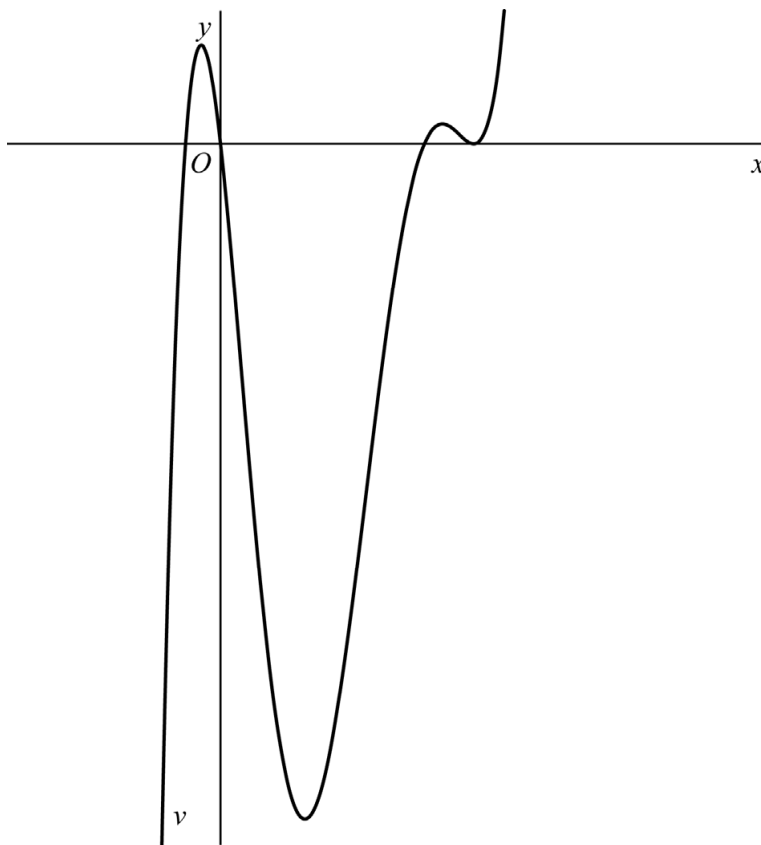
De grafiek van  $f$  heeft twee gemeenschappelijke punten met de  $x$ -as, bij  $x = 0$  en  $x = 3$ .

Verder is gegeven de functie  $h(x) = x^2 - 2x - 1$ .

De functie  $f$  wordt vermenigvuldigd met de functie  $h$ . Zo ontstaat de functie  $v(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x) \cdot (x^2 - 2x - 1)$ .

Zie figuur 1.

**figuur 1**



De grafiek van  $v$  heeft vier punten gemeenschappelijk met de  $x$ -as.

- 4p 15 Bereken exact de  $x$ -coördinaten van deze vier punten.

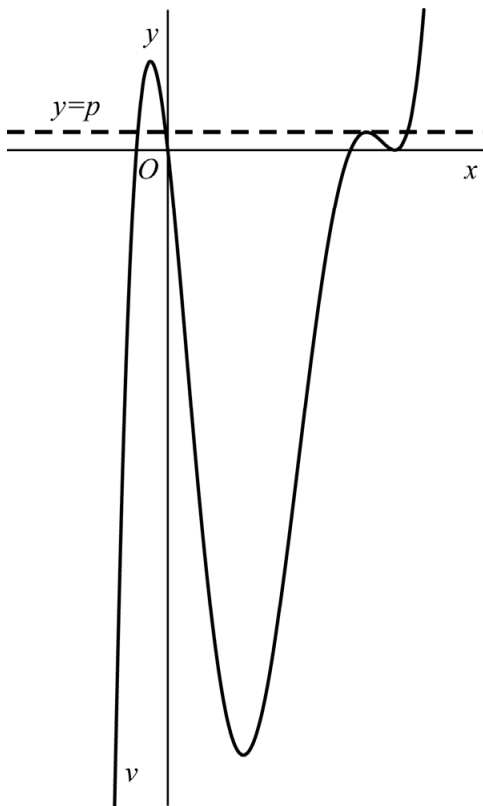
De grafiek van  $v$  heeft vier toppen.

De horizontale lijn met vergelijking  $y = p$  heeft 1, 2, 3, 4 of 5 punten gemeenschappelijk met de grafiek van  $v$ . Het aantal gemeenschappelijke punten hangt af van de waarde van  $p$ .

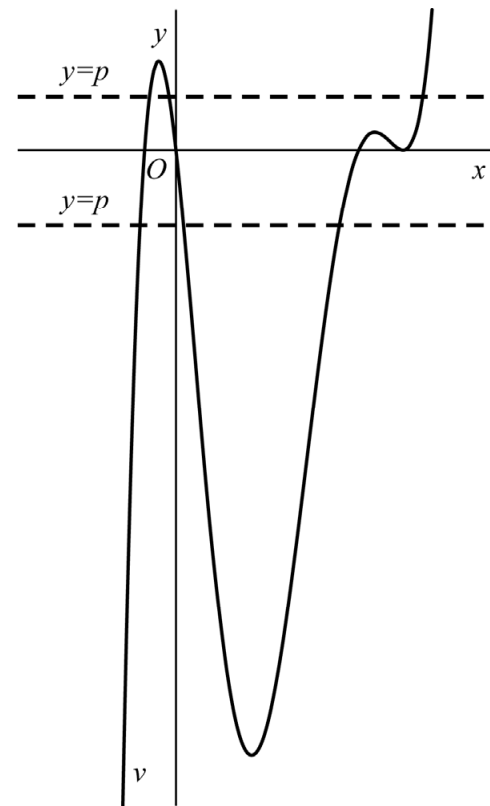
In figuur 2 zie je een voorbeeld waarin de vergelijking  $y = p$  vier punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van  $v$ .

In figuur 3 zijn voor twee verschillende waarden van  $p$  voorbeelden gegeven waarin de lijn  $y = p$  drie punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van  $v$ .

**figuur 2**



**figuur 3**



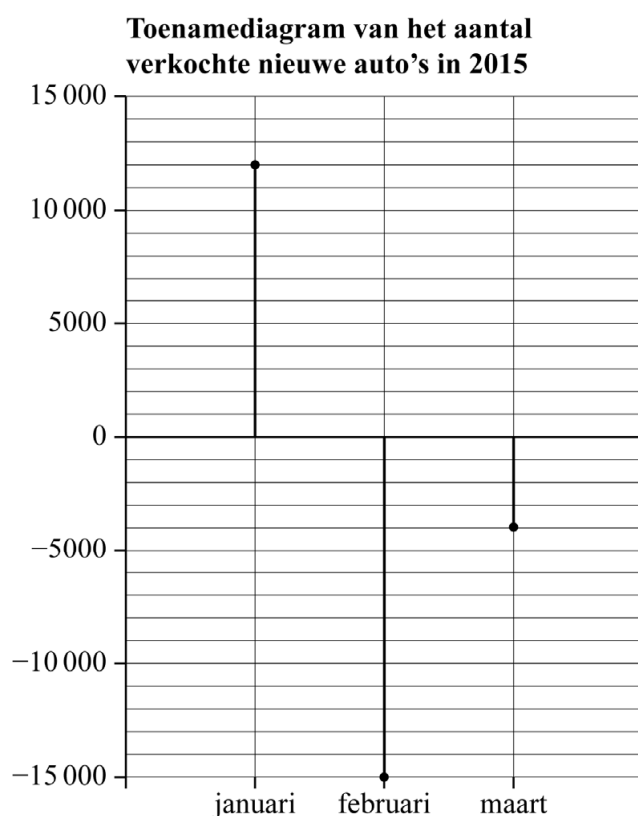
- 3p **16** Bereken voor welke waarden van  $p$  de lijn  $y = p$  vijf punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van  $v$ . Geef je eindantwoord zo nodig in één decimaal.

## Auto's in Nederland

Niet op elk moment in het jaar worden er evenveel nieuwe auto's verkocht. Meestal worden de meeste nieuwe auto's in januari verkocht.

In een toenamediagram kan de toename of afname van het verkochte aantal nieuwe auto's per maand ten opzichte van de maand ervoor worden getoond. In de figuur is het toenamediagram gegeven van de aantallen verkochte nieuwe auto's in de eerste drie maanden van het jaar 2015. De aantallen auto's zijn afgerond op duizendtallen.

**figuur**



Verder is bekend dat er in de maand februari 31,25% minder nieuwe auto's zijn verkocht dan in januari.

- 4p 17 Bereken het totaal aantal nieuwe auto's dat in de eerste drie maanden van 2015 is verkocht.

Tussen 1990 en 2016 is het totale aantal auto's in Nederland bij benadering lineair gegroeid:

- Op 1 januari 1990 waren er in totaal 5,2 miljoen auto's.
- Op 1 januari 2016 was dit totale aantal 8,1 miljoen.

Bij deze auto's zijn ook elektrische auto's.

Het aantal elektrische auto's is tussen 2010 en 2016 bij benadering exponentieel gegroeid:

- Op 1 januari 2010 waren er 40 duizend elektrische auto's.
- Op 1 januari 2016 was dit aantal 211 duizend.

Iemand doet in 2016 de volgende uitspraak:

“Als het totale aantal auto's lineair blijft toenemen en het aantal elektrische auto's exponentieel blijft toenemen, dan is op 1 januari 2027 bijna de helft van de auto's in Nederland elektrisch.”

- 6p   **18**   Toon aan dat de uitspraak klopt door het verwachte percentage elektrische auto's op 1 januari 2027 te berekenen. Geef je eindantwoord in gehele procenten.

---

#### **Bronvermelding**

*Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.*