

Examen HAVO

2026

tijdvak 1
dinsdag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 17 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Hoeken

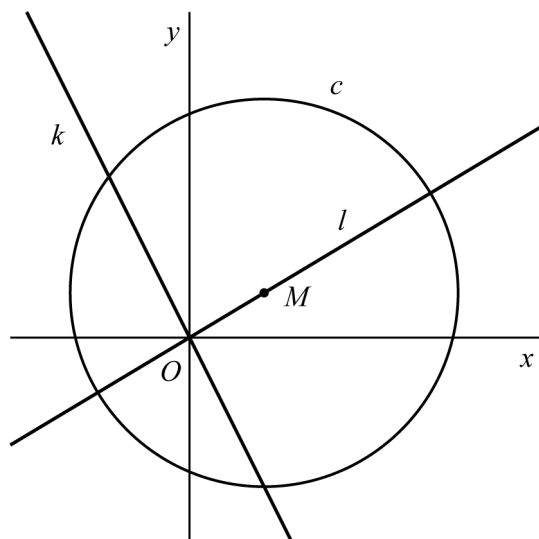
De cirkel c met middelpunt M is gegeven door de vergelijking:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y = 135$$

De lijn k heeft vergelijking $y = -2x$.

De lijn l is de lijn door de punten O en M . Zie figuur 1.

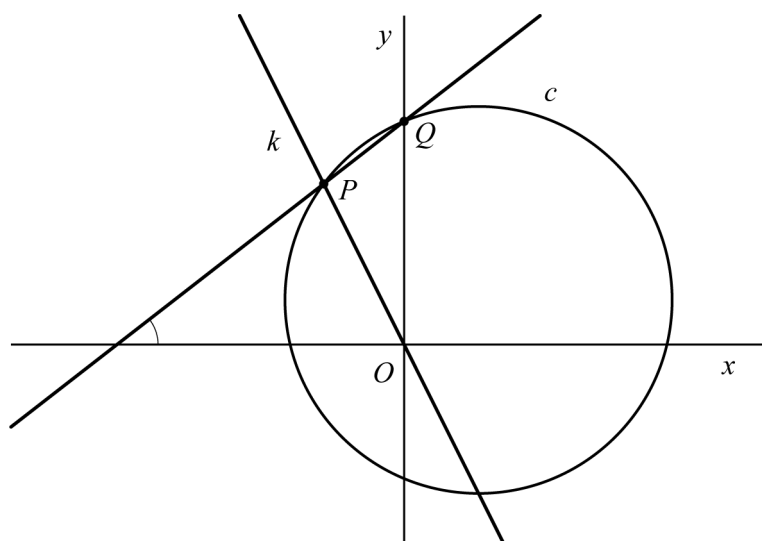
figuur 1



- 4p 1 Onderzoek op exacte wijze of k en l elkaar loodrecht snijden.

Lijn k snijdt het deel van de cirkel boven de x -as in het punt P . Het punt $Q(0, 15)$ is het snijpunt van c met de positieve y -as. Zie figuur 2.

figuur 2



In figuur 2 is de hoek aangegeven die de lijn door P en Q met de x -as maakt.

- 7p 2 Bereken algebraïsch deze hoek in graden. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Exponentiële functies

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2^{3-x^2}$ en de functie g wordt gegeven door $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x^2}$.

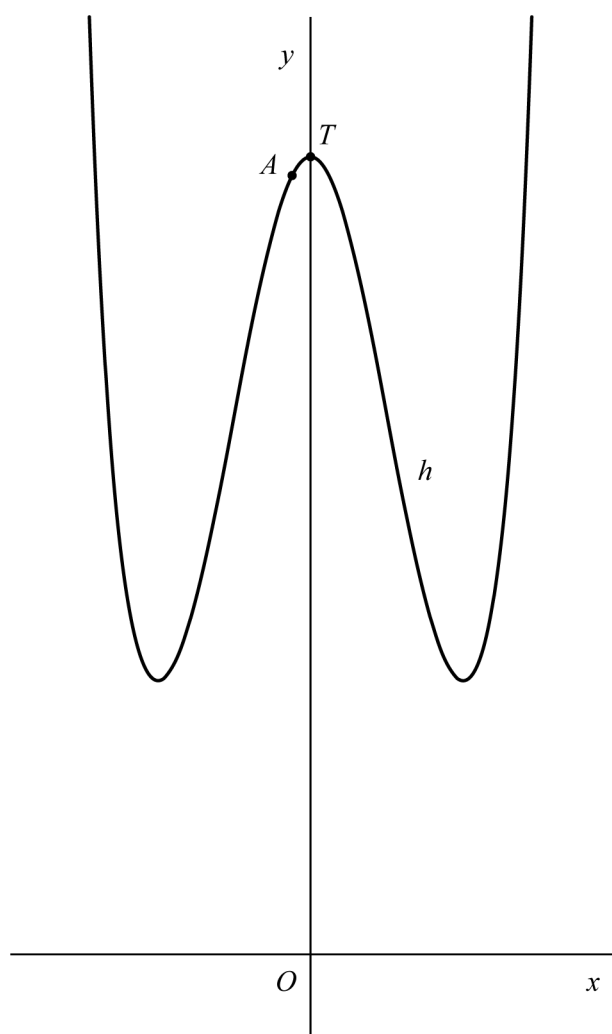
De grafieken van f en g hebben twee snijpunten. Beide snijpunten hebben dezelfde y -coördinaat.

- 4p **3** Bereken exact deze y -coördinaat. Schrijf je antwoord in de vorm $\sqrt{a}$ met a een geheel getal.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.

De grafiek van h heeft drie toppen, waaronder het punt T op de y -as. Zie de figuur.

figuur



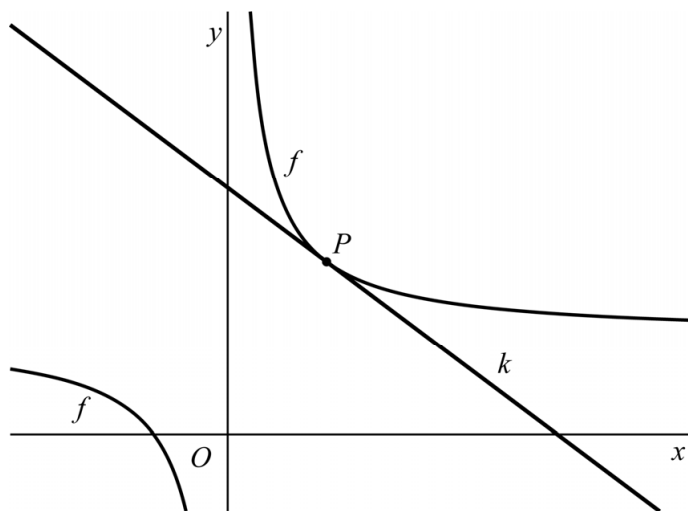
Op de grafiek van h liggen links van de y -as twee punten waarin de raaklijn helling 2 heeft; het punt dat het dichtst bij de y -as ligt, is het punt A . De hoogte van A is kleiner dan de hoogte van T .

- 5p **4** Bereken het verschil tussen deze hoogtes. Geef je eindantwoord in drie decimalen.

Hyperbool

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{3}{x} + 2$. De grafiek van f is een hyperbool. Op deze hyperbool ligt het punt $P(2, 3\frac{1}{2})$. De lijn k raakt de hyperbool in P . Zie figuur 1.

figuur 1



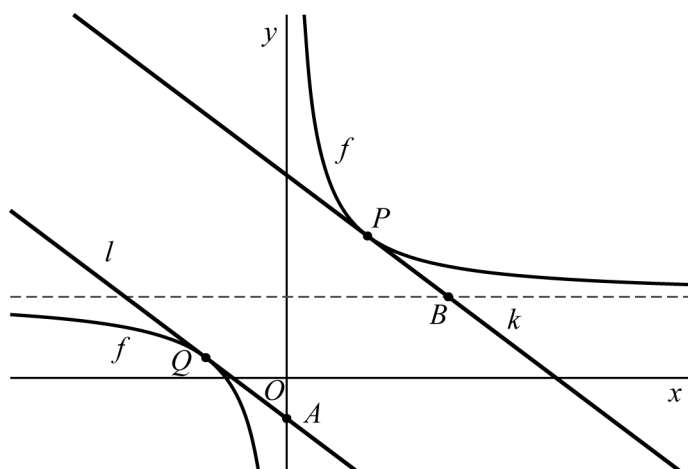
Een vergelijking van k is $y = -\frac{3}{4}x + 5$.

4p **5** Bewijs dit.

De lijn l met vergelijking $y = -\frac{3}{4}x - 1$ raakt de hyperbool in het punt $Q(-2, \frac{1}{2})$. Lijn l snijdt de y -as in het punt A . Zie figuur 2.

In deze figuur is ook de horizontale asymptoot van de hyperbool gestippeld weergegeven. Lijn k snijdt deze asymptoot in het punt B .

figuur 2



Het lijkt of de lijnstukken AB en PQ even lang zijn.

5p **6** Onderzoek op exacte wijze of AB en PQ even lang zijn.

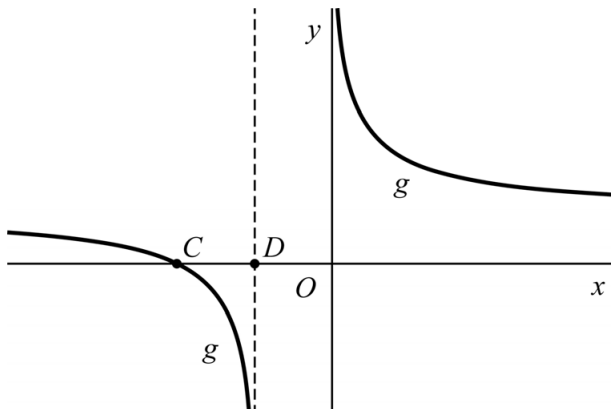
De functie g ontstaat uit de functie f door een logaritme van f te nemen:

$$g(x) = {}^2\log\left(\frac{3}{x} + 2\right)$$

De grafiek van g snijdt de x -as in het punt C .

De y -as is een verticale asymptoot van de grafiek van g . Links van de y -as is er nog een verticale asymptoot. Deze asymptoot snijdt de x -as in het punt D . Zie figuur 3.

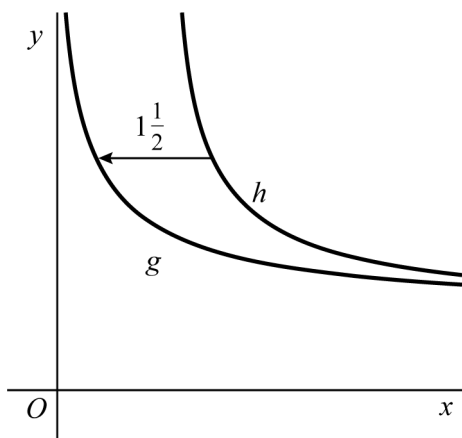
figuur 3



- 4p 7 Bereken exact de lengte van het lijnstuk CD .

De functie h wordt gegeven door $h(x) = {}^2\log(2x) - {}^2\log(x - 1\frac{1}{2})$. In figuur 4 is de grafiek van h weergegeven. Het deel van de grafiek van g dat rechts van de y -as ligt, is ook weergegeven.

figuur 4



Bewering: als de grafiek van h $1\frac{1}{2}$ naar links wordt verschoven, dan valt de verschoven grafiek samen met het rechterdeel van de grafiek van g .

- 3p 8 Onderzoek op exacte wijze of deze bewering juist is.

Temperatuur in de grond

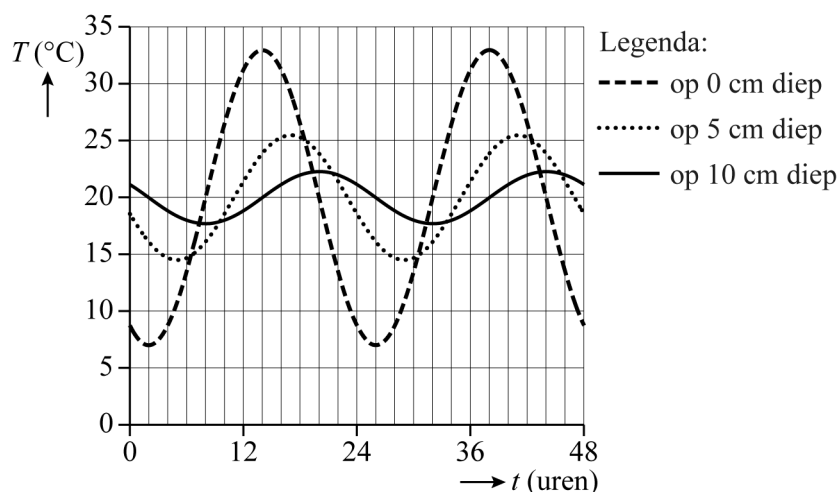
Gedurende de dag verandert de temperatuur van de buitenlucht. Meestal is het in de nacht kouder dan overdag en is het in de middag het warmst. De temperatuur van de grond op verschillende diepten zal zich aanpassen aan de temperatuur van de buitenlucht. Die aanpassing loopt in de tijd wat achter ten opzichte van de temperatuur van de buitenlucht.

We kijken eerst naar gemeten temperaturen op verschillende diepten in veengrond. We doen dat voor een bepaalde periode van twee dagen. Op basis van de meetresultaten op de grond (0 cm diep) en op twee verschillende diepten (5 cm diep en 10 cm diep) zijn in een model drie sinusoïden getekend. Zie de figuur.

Hierbij is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na het begin van de twee dagen, met $t = 0$ om 0.00 uur.

De figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



In deze figuur is bijvoorbeeld af te lezen dat de temperatuur op de grond in de loop van de middag maximaal is. De maximale temperaturen op een diepte van 5 cm en 10 cm worden op een later tijdstip bereikt.

Bij elke grafiek hoort een formule van de vorm $T = a + b \cdot \sin(c(t - d))$.

- 4p **9** Bepaal de waarden van a , b , c en d voor de grafiek op de grond. Geef a , b en d als geheel getal en geef c in één decimaal. Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage.

Naarmate je dieper in de grond meet, worden de verschillen tussen de maximale en minimale temperatuur kleiner. Dit is in de figuur aan de amplitudes van de grafieken te zien. In het model neemt de amplitude van de grafiek exponentieel af met de diepte.

De amplitude van de grafiek van 5 cm diepte is 5,5. De amplitude van de grafiek van 10 cm diepte is 2,3. Met behulp van deze amplitudes kan de groeifactor van de amplitude per 5 cm diepte worden berekend. Hieruit volgt de procentuele afname per 1 cm diepte.

- 3p 10 Bereken algebraïsch deze procentuele afname van de amplitude per 1 cm diepte. Geef je eindantwoord in gehele procenten.

Tijdens een periode van vorst bevriest de grond. Om te weten hoe diep de vorst in de grond zit, wordt dagelijks de **vorstindex** bepaald. Hiervoor worden de gemiddelde dagtemperaturen (in $^{\circ}\text{C}$) vanaf het begin van de vorstperiode opgeteld. De vorstindex I is het tegengestelde van de uitkomst van deze optelling. Er geldt dus:

$$I = -(\text{som van de gemiddelde dagtemperaturen vanaf het begin van de vorstperiode})$$

Voor drie opeenvolgende dagen op een bepaalde plaats staat hieronder een voorbeeld van de berekening van de vorstindex I , waarbij het op dag 1 begint te vriezen.

voorbeeld

dagnummer	gemiddelde dagtemperatuur	som van de gemiddelde dagtemperaturen vanaf het begin van de vorstperiode	vorstindex I
1	$-4,5^{\circ}\text{C}$	$-4,5$	4,5
2	$-7,5^{\circ}\text{C}$	$-4,5 + -7,5 = -12$	12
3	2°C	$-4,5 + -7,5 + 2 = -10$	10

Op een plaats met lichte kleigrond willen we bepalen tot hoe diep de vorst in de grond zit. Deze diepte wordt in een vereenvoudigd wiskundig model benaderd met de formule:

$$z = 4\sqrt{I}, \text{ met } z \text{ de diepte in cm en } I \text{ de vorstindex}$$

Op deze plaats geldt na een aantal dagen flinke vorst dat de vorst tot 20 cm in de grond zit.

De weersvoorspelling is dat op de dagen die volgen, de gemiddelde dagtemperatuur elke dag 6 graden Celsius boven 0 is.

Met die weersvoorspelling is te berekenen na hoeveel dagen de vorst op deze plaats voor het eerst helemaal uit de grond is verdwenen.

- 4p 11 Bereken met behulp van de formule voor z na hoeveel hele dagen de vorst voor het eerst helemaal uit de grond is verdwenen.

Een wortelfunctie benaderen

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 1 + 2\sqrt{4-x}$.

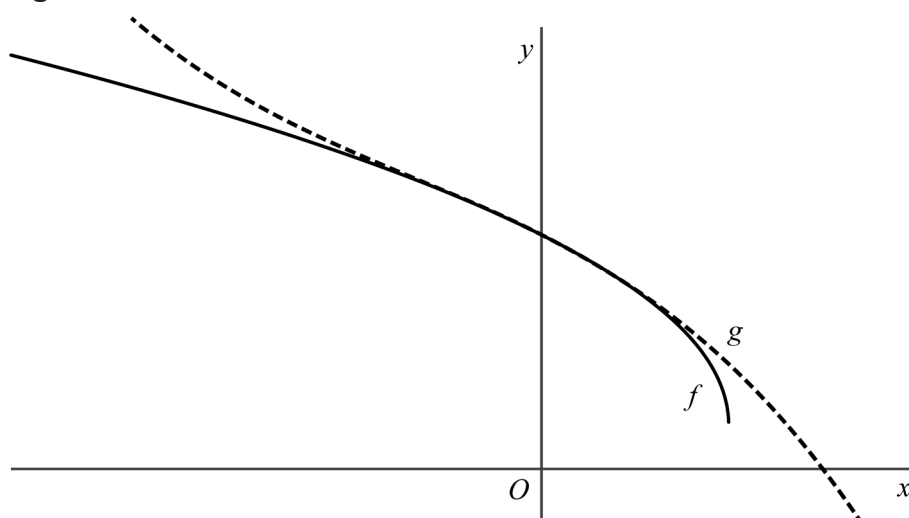
De functie g wordt gegeven door $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$. Hierin zijn a , b , c en d constanten.

In de figuur is de grafiek van f weergegeven.

Ook is voor een keuze van de waarden van a , b , c en d de grafiek van g gestippeld weergegeven.

In de buurt van $x = 0$ benadert de grafiek van g de grafiek van f .

figuur



Voor de weergegeven grafieken geldt: $f(0) = g(0)$ en $f'(0) = g'(0)$.

Uit $f(0) = g(0)$ volgt $d = 5$.

De waarde van c volgt uit $f'(0) = g'(0)$.

Er geldt: $c = -\frac{1}{2}$.

4p 12 Bewijs dat $c = -\frac{1}{2}$.

Voor de grafiek van g in de figuur geldt verder: $a = -\frac{1}{256}$ en $b = -\frac{1}{32}$.

Daarmee wordt de functie g gegeven door $g(x) = -\frac{1}{256}x^3 - \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{2}x + 5$.

De grafiek van f ligt nergens boven de grafiek van g .

Hoe verder x van 0 afwijkt, des te groter is de verticale afstand tussen de twee grafieken.

3p 13 Bereken voor welke twee waarden van x de verticale afstand gelijk is aan 0,05. Geef je eindantwoorden in twee decimalen.

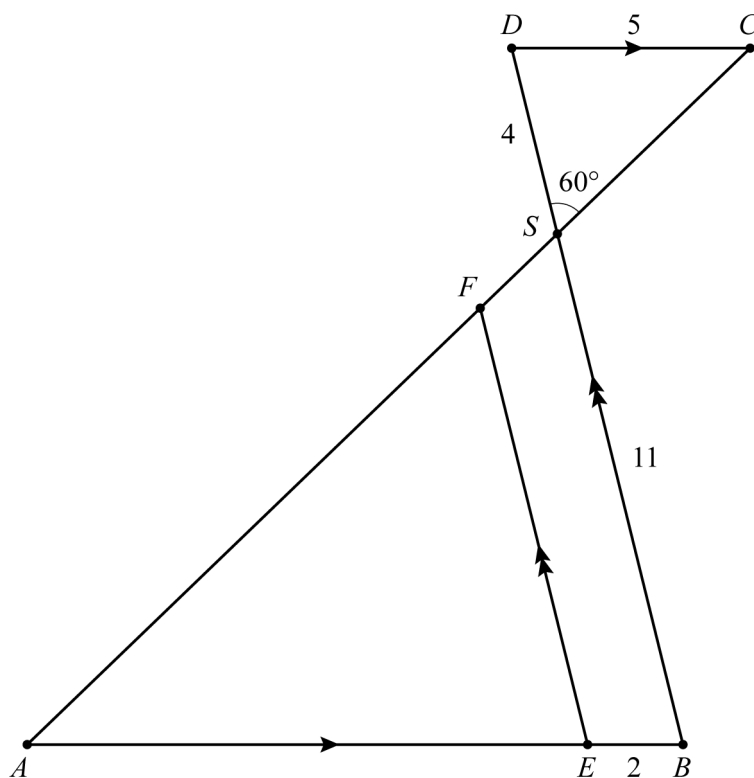
Gelijkvormige driehoeken

Gegeven zijn de gelijkvormige driehoeken ABS en CDS . De zijden AB en CD zijn evenwijdig. Het punt S is het snijpunt van de lijnstukken AC en BD .

Het punt E ligt op het lijnstuk AB en het punt F ligt op het lijnstuk AS zodanig dat het lijnstuk EF evenwijdig is met het lijnstuk BS .

Verder geldt dat $BS = 11$, $DS = 4$, $CD = 5$, $EB = 2$ en $\angle CSD = 60^\circ$. Zie de figuur.

figuur



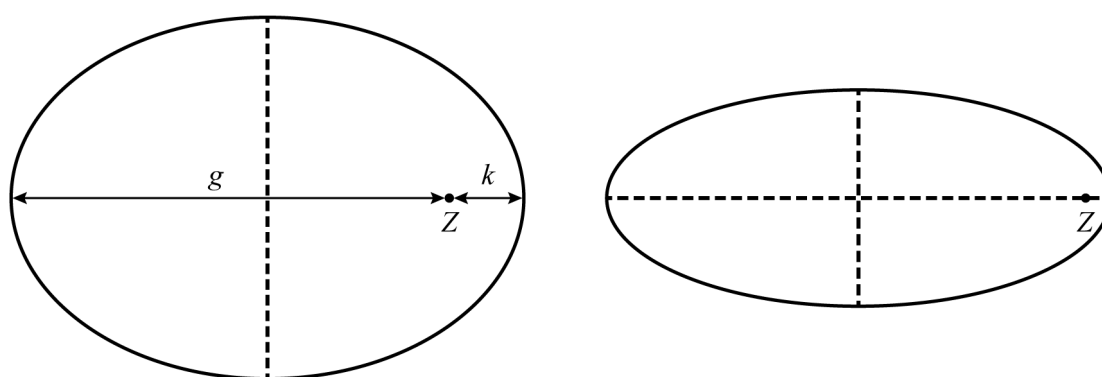
- 7p 14 Bereken de lengte van het lijnstuk AF . Geef je eindantwoord in één decimaal.

Komeetbanen

Kometen zijn relatief kleine hemellichamen die vaak in een baan om een ster draaien. In deze opgave bekijken we komeetbanen rondom onze zon. Zo'n baan heeft twee symmetrieassen, een lange en een korte as, die loodrecht op elkaar staan. Het snijpunt van deze assen is het midden van de baan. De zon Z bevindt zich op de lange as, maar niet in het midden. De afstand van de komeet tot het middelpunt van de zon varieert. Als de komeet zich op de lange as bevindt, worden de grootste afstand g en de kleinste afstand k bereikt.

In figuur 1 zijn twee voorbeelden van een komeetbaan met zijn symmetrieassen getekend.

figuur 1



Komeetbanen hebben verschillende vormen. De vorm hangt samen met g en k . Hoe kleiner het verschil tussen g en k , hoe meer de baan op een cirkel gaat lijken. Een maat voor de vorm van de baan is de **excentriciteit**.

De excentriciteit e wordt berekend met de formule:

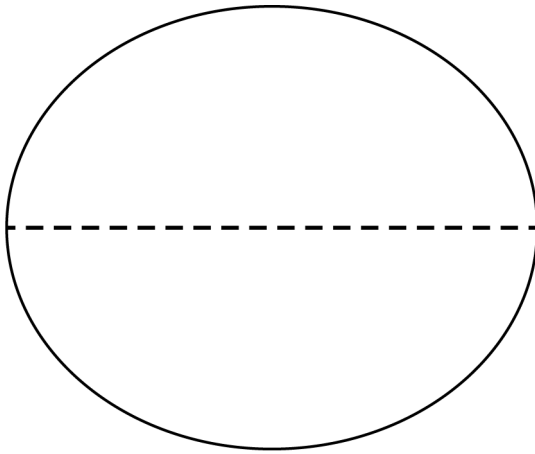
$$e = \frac{g - k}{g + k}$$

Voor twee komeetbanen met een verschillende waarde voor g en ook voor k geldt dat afstand g vier keer zo groot is als afstand k .

- 3p **15** Onderzoek op exacte wijze of beide banen dezelfde excentriciteit hebben. Bij dit onderzoek is het gebruik van getallenvoorbeelden onvoldoende.

Kometen worden aangeduid met een nummer gevolgd door een letter.
In figuur 2 is de baan van komeet 53P weergegeven. Figuur 2 is vergroot weergegeven op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Voor deze baan geldt:

- de lengte van de lange as op de uitwerkbijlage is gelijk aan 10 cm;
- de excentriciteit is 0,553.

Met een stelsel van vergelijkingen kan de plaats van de zon op de lange as in de tekening worden bepaald. Ga ervan uit dat de zon zich rechts van het midden bevindt.

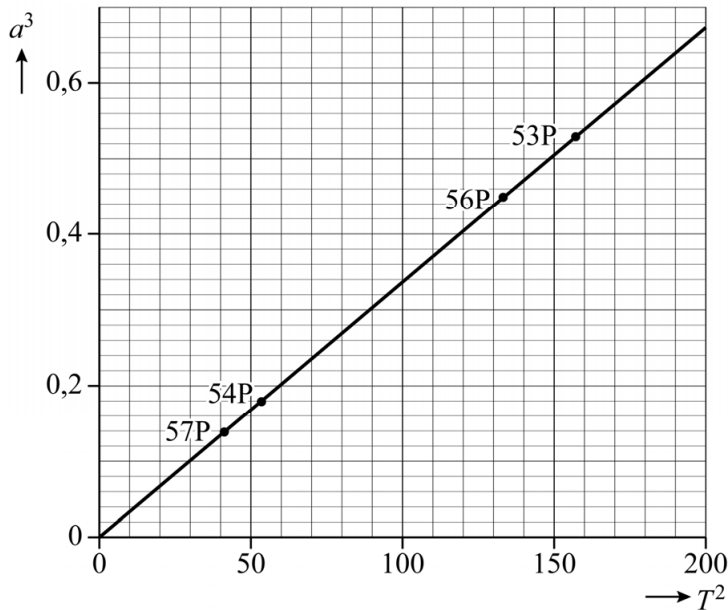
- 5p **16** Bereken de waarde van g (of k) in één decimaal **en** teken vervolgens de plaats van de zon op de uitwerkbijlage.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

De omlooptijd T is de tijd die een komeet er over doet om één keer om de zon te draaien. De lengte van de halve lange as van de baan is a .

In figuur 3 is voor de kometen 53P, 54P, 56P en 57P a^3 uitgezet tegen T^2 . De omlooptijd T is in jaren en de lengte a in miljarden kilometer. Tussen a en T bestaat een verband: er geldt dat a^3 recht evenredig is met T^2 . In figuur 3 is door middel van een lijn het recht evenredige verband weergegeven. Figuur 3 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 3



De komeet 55P draait in 33,2226 jaar om de zon. Het bijbehorende punt ligt buiten figuur 3.

- 5p 17 Bereken de lengte a van de halve as van de baan van komeet 55P. Voor het bepalen van de evenredigheidsconstante kun je de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken. Geef je eindantwoord in miljarden kilometer in twee decimalen.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.